1. יציבות החומר

הקדמה

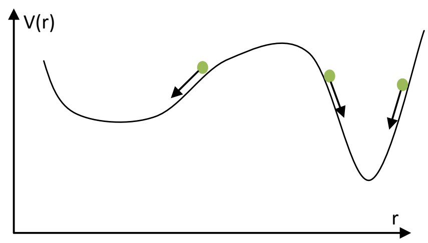
בקורס זה אנו נעסוק בסוגיית המבנה של אטומים ומולקולות. בפרט נרצה להבין: מדוע האטומים והמולקולות יציבים?

אנו נצא מתוך מידע ניסיוני ונבנה מודל תיאורתי המסביר מעקרונות יסוד את יציבות האטומים והמולקולות וכן תכונות נוספות שלהם.

מתוך שלל עדויות ניסיוניות, ברור לנו כי החומר בעולמנו בנוי מולקולות ואלה האחרונות נוצרות מהרכבות של אטומים. בכל אטום יש גרעין זעיר הנושא את מרבית המסה והוא בעל מטען חשמלי חיובי. כמוכן יש באטום אלקטרונים - חלקיקים קלילים בעלי מטען חשמלי שלילי, כך שהאטום הינו נייטראלי (יש כמובן גם אטומים ומלקולות טעונות. אלה נקראים יונים וגם הם לעיתים יציבים, אולם לשם פשטות, אנו נטפל באטום נייטרלי).

בהמשך הקורס, נניח לשם הפשטות שגרעין האטום הינו נקודתי, כלומר, נתייחס אליו כאילו כל המטען החיובי שבו מצוי בנקודה חסרת נפח. למעשה, פרט לגרעין אטום המימן אין זה נכון להניח "נקודתיות" כזו, שכן לגרעין האטום יש מבנה. הוא מורכב חלקיקים ניטרליים - הנויטרונים וחלקיקים נושאי מטען חיובי - הפרוטונים. בין הפרוטונים פועלים כוחות דחייה חשמליים. אולם בין חלקיקי הגרעין יש כוחות נוספים לא-חשמליים קצרי טווח ("כוחות גרעינים"), והם אחראיים ליציבות הגרעין (גרעין לא יציב מתפרק רדיואקטיבית[1]). בכל זאת. נסיונות הוכיחו כי רדיוס הגרעין הנו קטן בערך פי 10^5 מרדיוס האטום, לכן יש לנו הצדקה מסויימת לטפל באטום תוך הנחה שהגרעין הינו מטען חיובי "נקודתי". בפיסיקה מקובל להניח הנחות שידוע כי אינן לגמרי נכונות אבל שיש בהן הגיון ומטרתן לפשט את תיאור התופעות השונות. הנחות אלה מכונות "קרובים".

<u>הבנת עקומות פוטנציאל</u>. העקום $V(r)$ מאפשר לנו לקבוע את מאפייני הכוח. השיטה היא פשוטה: מדמיינים כדור קטן המונח על עקום הפוטנציאל וחושבים לאן יתגלגל הכדור לו היה העקום משטח החלקה: אם ינוע ימינה, הכוח מכוון ימינה, אם ינוע שמאלה, כך גם הכוח. אם שיפוע גדול הכוח גדול. וכו'.



פרט לכוחות הגרעיניים, שאינם משפיעים מחוץ לתחומי הגרעין, יש רק שלושה כוחות בין-חלקיקים הידועים לנו היכולים להסביר את יציבות האטום: כוח המשיכה הגרוויטאציוני, כוח מגנטי וכוח חשמלי. ניתן להראות שהראשון הוא לחלוטין לא רלוונטי – הוא הרבה יותר מדי חלש (פי 10^{40} חלש מהכוח החשמלי). ניתן גם להראות שכוחות מגנטיים ברוב המולקולות ה"רגילות" אינם משחקים תפקיד משמעותי. נותרת אם כך האינטראקציה החשמלית.

---

[1] ייצוב הגרעין הוא עניין לקורס ״מבוא לקשר הגרעיני״ ולא נעסוק בו כאן.

אטום המימן הקלאסי: העדר יציבות סטאטית

באטום מימן יש אלקטרון הטעון מטען שלילי $-e$ בעל מסה m_e וגרעין בעל מטען חיובי $+e$ ומסה $m_p \approx 1836m_e$. שני חלקיקים אלה הם נקודתיים (כלומר, מדענים לא הצליחו למצוא גבול תחתון לרדיוס שלהם). מכיוון שהגרעין מאד כבד, ניתן להניח שהוא נייח ונמצא ב"ראשית הצירים" (שוב, קירוב!), ושרק האלקטרון נע סביבו. לפי חוק קולון (Coulomb Law), האנרגיה הפוטנציאלית של האינטראקציה שלהם, כאשר הם במרחק r היא:

$$V(r) = -\frac{\kappa e^2}{r} = -\frac{\kappa e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \kappa \approx 9\times 10^{-9}\, J\cdot \frac{m}{Coul^2} \tag{1.1}$$

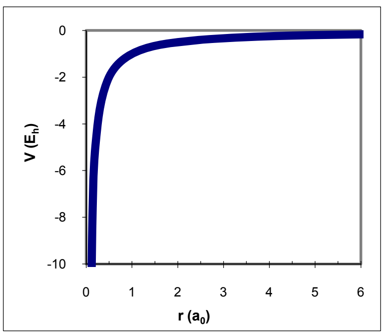
צורת פונקצית הפוטנציאל מצויירת באיור 1. הפוטנציאל קובע את הכוח על האלקטרון: הנגזרת של הפוטנציאל היא מינוס הכוח הפועל על האלקטרון.

כלומר, שיפוע עקומת הפוטנציאל קובע את כיוון ועוצמת הכוח. מכיוון ש הפוטנציאל תלוי רק במרחק r, הכוח הוא כוח רדיאלי בכיוון הגרעין. מהציור רואים שהפוטנציאל שואף ל- $-\infty$ כאשר $r \to 0$. עובדה זו מכונה בשם "סינגולריות קולונית".

במכאניקה למדנו כי האנרגיה הכוללת של האלקטרון, שנסמנה באות H מורכבת מסכום האנרגיות הקינטיות של חלקיקי המערכת (תסומנה באות T) והאנרגיות הפוטנציאליות (תסומנה באות V). במקרה של אטום:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\kappa e^2}{r} = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m_e} - \frac{\kappa e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.2}$$

באשר, $\boldsymbol{p} = m_e \boldsymbol{v}$ הוא ווקטור התנע הקווי של האלקטרון. (1.1)



עקומת האנרגיה הפוטנציאלית של אלקטרון באטום המימן. יחידות האורך והאנרגיה נקראים יחידות אטומיות. נלמד עליהם בהמשך הקורס.

בדרך-כלל האנרגיה הכוללת של מערכת היא קבוע-תנועה (אינה משתנה בזמן התנועה). לכן, כאשר "מניחים" אלקטרון במנוחה ($\boldsymbol{p} = 0$) במרחק d מגרעין, עקב כוח המשיכה, יחל האלקטרון לנוע אל עבר הגרעין ולמעשה "יתמוטט" ויואץ אל תוכו. בתהליך זה האנרגיה הפוטנציאלית קטנה ככל שמתקרב האלקטרון לגרעין, ומכאן, האנרגיה הקינטית הולכת וגדלה, כדי לשמר את הסכום המהווה את האנרגיה הכוללת הקבועה. כך, הופכת האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה קינטית והאלקטרון מואץ אל הגרעין במהירות הולכת וגדלה.

אילו היה האלקטרון חלקיק נייטראלי, סכום האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית שלו היו נשמרים, כפי שציינו לעיל. אולם אלקטרון

טעון במטען חשמלי. ועל-פי תורת האלקטרומגנטיות של מקסוול מטען מואץ פולט קרינה אלקטרומגנטית[2]. כך נפתח ערוץ אנרגתי נוסף: האנרגיה הפוטנציאלית של האלקטרון אינה חייבת להפוך לאנרגיה קינטית אלא יכולה להפוך לאנרגיית קרינה. אנרגיה זו איננה יכולה לחזור אל האלקטרון ולכן התוצאה של אפיק חדש זה היא שהאלקטרון מאבד אנרגיה (האנרגיה ממשיכה להתקיים במרחב אך אינה עומדת לרשות החלקיק). לכן, לאחר זמן, בסופו של תהליך, יקרוס האלקטרון אל תוך הגרעין. הדבר אינו מתיישב עם עובדות ניסיוניות כגון ניסויי רתרפורד שהזכרנו לעיל המראים בברור שהגרעין החיובי מופרד מן האלקטרון.

יציבות דינאמית

האם ניתן להסביר מדוע האלקטרון אינו מתמוטט לתוך הגרעין? אולי מה שדרוש הוא כוח מתנגד?

הכוח היחיד שאנו מכירים שיכול להתנגד לכוח החשמלי הוא הכוח הצנטריפוגלי. מנין "מופיע" כוח זה? מתברר, שהוא מופיע מאליו כתוצאה מהתנועה המשיקית של האלקטרון. כוח זה הוא הכוח הרדיאלי המושך ממרכז הסיבוב החוצה. אנו חווים בחיי היום-יום את הכוח הזה כשאנו "נמשכים שמאלה" בכל פעם שהמכונית בה אנו נוסעים מסתובבת ימינה.

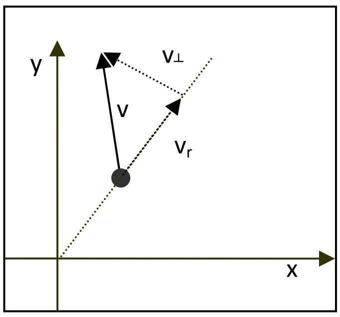
נגדיר מהירות רדיאלית כקצב השינוי של מרחק האלקטרון מהגרעין (נסמן מרחק זה ב- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$):

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad (1.3)$$

זהו רכיב המהירות המכוון מהגרעין והחוצה לאורך הקו המחבר ביניהם. בהתאמה, נגדיר תנע רדיאלי בביטוי: $p_r = m_e v_r$ (כזכור, תנע הוא מכפלה של המסה במהירות).

רכיב המהירות שאינו רדיאלי, המהירות המשיקית $v_\perp$, מתבטא ב"תנע זוויתי" ומוגדר על-ידי $L = r m_e v_\perp$. המהירות הכוללת ניתנת להרשם באמצעות המהירות הרדיאלית והמשיקית, ולכן גם באמצעות התנע הרדיאלי והסיבובי:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_r^2 + v_\perp^2 = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{L^2}{2m_e r^2} \qquad (1.4)$$



מכאן, האנרגיה הקינטית של החלקיק תרשם כך:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{L^2}{2m_e r^2} \qquad (1.5)$$

[2] קרינה אלקטרומגנטית: שם כולל לסוגים רבים של קרינות, כגון: קרינת רדיו, מיקרוגל, אינפרא-אדום, אור נראה, אולטרא סגול, קרינת x, קרינה רדיואקטיבית מסוג γ. כל סוגי הקרנה הללו הם למעשה שדות חשמליים ומגנטיים המתפשטים במרחב ומתנודדים בזמן, במהירות השווה למהירות האור.

מחוקי ניוטון אנו יודעים שכאשר פועל על חלקיק כוח בכיוון כלשהו משנה רכיב התנע של החלקיק באותו כיוון. מה קורה כאשר הכוח רדיאלי? אפשר להוכיח שהכוח הרדיאלי משפיע רק על התנע הרדיאלי ולא על התנועה <u>המשיקית</u>, יוצא, שכוח רדיאלי אינו משפיע על התנע הזוויתי L . במקרה זה L הוא <u>קבוע-תנועה</u>, היינו בעל ערך קבוע במהלך התנועה. כל פעם שמאתרים קבוע של התנועה, יש סיבה למסיבה: הדבר מאד מפשט את ניתוח המערכת!

האנרגיה הכוללת של האלקטרון-גרעין היא:

$$H = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{\kappa e^2}{r} \qquad (1.6)$$

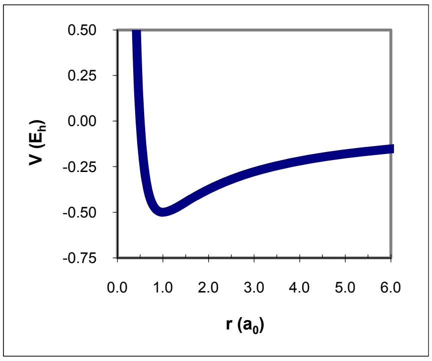
כאשר $L \neq 0$ מקבלים כוח כולל שבמרחק גדול נראה כמו הכוח הקולוני המושך ובמרחקים קצרים מאד כמו הכוח הצנטריפוגלי הדוחה. כך קיימת נקודת שיווי משקל בה קיים מצב בו האלקטרון קשור לאטום אך אינו נופל פנימה. נקודת השיווי משקל היא הנקודה בה הכוח הרדיאלי הכולל מתאפס כלומר:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{\kappa e^2}{r}\right)_{r=r_{eq}} = 0 \qquad (1.7)$$

ונקבל:

$$r_{eq} = \frac{L^2}{m_e \kappa e^2} \qquad (1.8)$$

הערה: האנליזה שעשינו כאן תקפה לכל בעיה שבה יש כוח רדיאלי. בגראוויטאציה למשל מרחקי שיווי המשקל הם כאלה המאפשרים את סיבובם של כוכבי הלכת סביב השמש (במקרה זה, יש גם ויבראציה – המתבטאת במסלול אליפטי).



עקומת האנרגיה הפוטנציאלית של אלקטרון בעל תנע זוויתי $L=1a_0$ באטום המימן

תרגיל: "יחידות אטומיות" (בהן $m_e = 1$, $\kappa e^2 = 1$). במצב 2p יש לאלקטרון באטום המימן תנע זוויתי $L = 1\hbar$ ($\hbar$ היא יחידת תנע זוויתי ביחידות האטומיות). מהו רדיוס המסלול של האלקטרון סביב הגרעין?

תשובה: $r_{eq} = \frac{1^2}{1\times1} = 1\ a_0$. הסימון a_0 הוא יחידת האורך ביחידות אטומיות והוא מכונה "רדיוס בוהר" קיים: $a_0 = 0.529177 \times 10^{-10} m$. רואים שרדיוס האלקטרון במצב 1p (בקרוב הקלאסי) הוא $r_{eq} \approx 0.5$ Å.

קריסת המודל הקלאסי

אלקטרון הנע במסלול מעגלי סביב הגרעין מאיץ (תאוצה פירושה שינוי ווקטור המהירות ומהירות האלקטרון משנה כיוון כל הזמן כי הוא מסתובב סביב הגרעין). כאמור, לפי תורת הקרינה האלקטרומגנטית של מקסוול, אלקטרון מאיץ פולט כל הזמן קרינה אלקטרומגנטית הנושאת עמה אנרגיה ותנע זוויתי. המודל לעיל הסתמך על

שימור האנרגיה והתנע הזוויתי של האלקטרון. אבל האלקטרון מאבד אנרגיה. מהירותו קטנה ולכן התנע הזוויתי שלו קטן. דבר זה גורם להחלשת המחסום הצנטריפוגלי והאלקטרון מתחיל "לקרוס" אל תוך הגרעין.

כאשר החלו למדוד את אורכי הגל של אור הנבלע באטומים, התווספה לבעיית היציבות חידה מעניינת עוד יותר. התברר, כי אטומים ומולקולות בולעים אור נראה רק באורכי גל מסוימים ומוגדרים היטב. לפי התורה האלקטרו-מגנטית, יכול האלקטרון באטום לבלוע קרינה בכל אורך גל. שוב – סתירה לניסיון!

עובדות בלתי מוסברות אלה וכן תופעות נוספות שנתגלו בסוף המאה ה- 19, שאת חלקן נכיר בהמשך הקורס, הוליכו את הפיזיקאים של תחילת המאה ה-20 למסקנה הבלתי נמנעת שדרושה פיסיקה חדשה. בקורס זה נלמד את הפיסיקה החדשה הזו, המכונה פיסיקת הקוואנטים. בעזרתה נוכל להסביר את יציבות החומר, את מהות הקשר הכימי ואת הספקטרום הבדיד של אטומים ומולקולות.

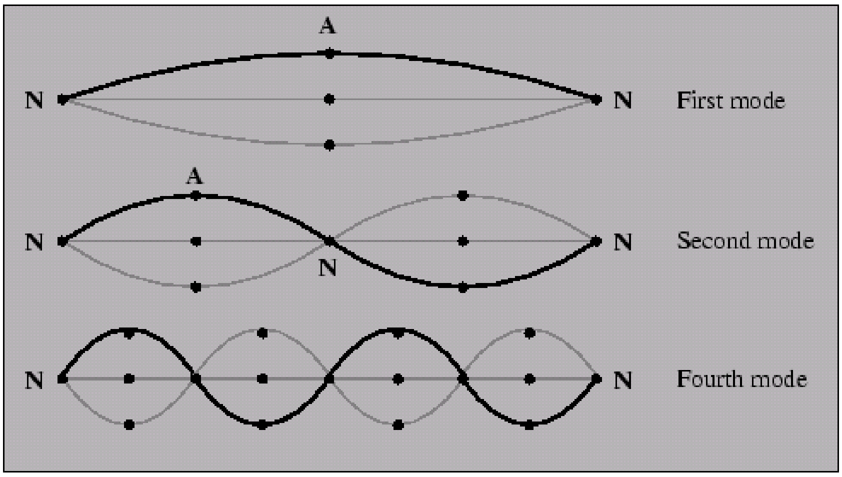
סיכום ומסקנות

- מבין הכוחות הבין-חלקיקים היכולים להסביר את יציבות האטום והמולקולה באים בחשבון הכוח החשמלי ואולי המגנטי
- מושגי האנרגיה: קינטית, פוטנציאלית, כוללת
- שימור האנרגיה הכוללת
- מושג התנע הזוויתי ושימור
- מושג התנע הרדיאלי
- אין יציבות "סטאטית" ואין יציבות דינאמית: בשתיהן החלקיק מואץ ומאבד אנרגיה לקרינה..
- דרושה מכאניקה חדשה שמסוגלת להסביר יציבות החומר

2. גלים על מיתר

גלים עומדים

באיור מוצג מיתר המוחזק בשני קצותיו. במצב המנוחה המיתר מתוח ב"קו ישר". כעת נדמיין תנועת המיתר, למשל לאחר שמכים בו. התנועה כרוכה בתזוזות שלו ממצב המנוחה. באזורים מסוימים ינוע המיתר מעל לקו הישר ובאזורים אחרים מתחתיו. התנועה משתנה מרגע לרגע במהירות, כמו תנועה של גלים. קשה מאד להתחקות אחר התנועה המורכבת של גלים על מיתר. אולם לכל מיתר יש סידרה של אופני תנודה שהם פשוטים לתיאור. אופני התנודה הללו הם אבני הבניין מהם בונים את כל סוגי התנועות המורכבות במיתר. אופני התנודה הפשוטים מכונים "אופני תנודה נורמאלים" normal modes of vibration. שמות נוספים שקולים: "גלים עומדים" (standing waves) וכן הרמוניקות (harmonics).



איור 1: מיתר מוחזק בשני קצותיו ומספר אופני תנודה נורמאלים.

באיור מוצגים שלושה אופני תנודה נורמאלים של מיתר. אופן התנודה הראשון (first mode) מורכב מתנודה פשוטה מעלה-מטה של כל הנקודות על המיתר. כולן נעות "בפאזה" (in phase) כלומר כולן מעל הקו או מתחת לקו ביחד: כל הזמן ביחד. אופן התנודה השני second mode מאופיין בקיום של צומת (node) היינו נקודה שאיננה סוטה ממצב המנוחה שלה כל זמן התנודה (הנקודה N). כל הנקודות על המיתר משמאל לצומת נעים בפאזה וכל הנקודות מימין נעים בפאזה הפוכה (כלומר, כאשר הנקודות משמאל מעל הקו, אלה מימין מתחתיו וההפך). אופן התנודה השלישי מכיל שלושה צמתים (לא נראה באיור) וזה הרביעי המופיע בציור – בעל שלושה צמתים, המחלקים את התיל לארבעה איזורי פאזה. מספר הצמתים + 1 שווה למספרו הסידורי של אופן התנודה.

כאשר המיתר מתנודד באופן תנודה נורמאלי, מבצעת כל נקודה בו תנועה הרמונית פשוטה המאופיינת בכך שהיא מחזורית בזמן עם זמן מחזור המסומן באות T ויחידותיו – יחידות זמן. התזוזה ϕ של כל נקודה במיתר מקיימת את המשוואה:

$$\phi(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{2.1}$$

על-פי משוואה זו, התזוזה המכסימלית של נקודה כלשהי על המיתר מכונה ה"משרעת" (Amplitude) ומסומנת באות A. לכל נקודה במיתר יש משרעת A אופיינית לה. כך, לנקודות שונות תהיה בדרך כלל משרעת A שונה אבל כולן נעות לפי הנוסחה לעיל בזמן.

אופן תנודה ראשון

התיאור המתמטי של אופן התנודה הראשון נותן את התזוזה ϕ כפונקציה של הזמן ושל המקום במיתר. הנקודה N השמאלית נמצאת ב- $x = 0$ והנקודה N הימנית – ב- $x = L$ כאשר L אורך המיתר. התזוזה של אופן התנודה הנורמאלי ראשון הנה:

$$\phi_1(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{2.2}$$

כאן, A המשרעת, L אורך המיתר, T זמן המחזור. רואים מיד שבקצות המיתר, כאשר $x=0$ או $x=L$ התזוזה היא אפס בכל זמן t. במקום לעבוד עם π כל הזמן, נוח יותר להגדיר "מהירות זוויתית":

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.3}$$

ו"מספר גל":

$$k = \frac{\pi}{L} \tag{2.4}$$

במונחים אלה, תזוזת המיתר באופן התנודה הראשון היא:

$$\phi_1(t) = A\sin(kx)\cos(\omega t) \tag{2.5}$$

היחס בין התדירות הזוויתי למספר הגל:

$$v = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{2.6}$$

מכונה "מהירות הפאזה" ומאפיין את המיתר (תלוי במתיחות המיתר והחומר ממנו עשוי). אנו נניח v נתון.

נסתכל על אמצע המיתר $x=\frac{L}{2}$. נקודה זו נעה מעלה-מטה בתנועה הרמונית פשוטה:

$$\phi_1\left(\frac{L}{2},t\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{2.7}$$

תנועה זו מחזורית עם זמן מחזור T, התזוזה המכסימלית החיובית היא בזמנים $t=0,T,\ 2T,\ldots$. התזוזה המכסימלית שלילית היא בזמנים... $t=0,T/2,3T/2,5T/2,$. אם ניקח נקודה אחרת על המיתר, למשל $x=\frac{L}{4}$ נקבל התנהגות כמעט זהה, רק המשרעת תהיה שונה:

$$\phi_1\left(\frac{L}{4},t\right) = A'\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{2.8}$$

ההבדל היחידי הוא שהפעם המשרעת ב- $x=\frac{L}{4}$ היא $A'=A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{A}{\sqrt{2}}$.

אופן תנודה השני

התיאור המתמטי של אופן התנודה השני דומה לראשון. הוא מתקבל מהכפלה של התדירות הזוויתית ב- 2. מכיוון שמהירות הפאזה מאפיינת את המיתר ולא את הגלים, היא קביעה ומספר הגל גם הוא חייב להיות מוכפל ב 2:

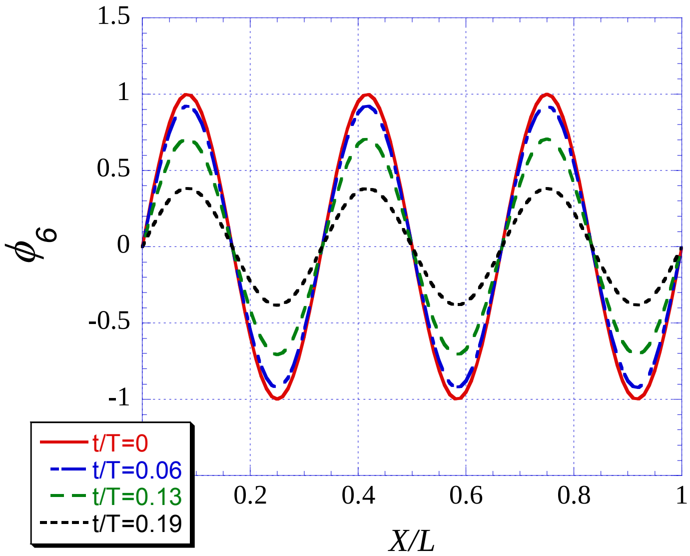
$$\phi_2(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = A\sin(2kx)\cos(2\omega t) \qquad (2.9)$$

הפעם אין תזוזה באמצע המיתר $x = \frac{L}{2}$:

$$\phi_2\left(\frac{L}{2},t\right) = A\sin(\pi)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = 0 \qquad (2.10)$$

כלומר במרכז המיתר יש לאופן התנודה השני "צומת"!

בדומה לאופן התנודה הראשון, כל נקודה על המיתר (המאופיינת על-ידי x כלשהו) נעה תנועה הרמונית פשוטה. אבל בשונה מאופן התנודה הראשון זמן המחזור קצר פי 2 (מהירות סיבובית ω גדולה פי 2). כמוכן, כל הנקודות במחצית השמאלית של המיתר נעות בפאזה הפוכה מאלה שבמחצית הימנית. כלומר, כאשר נקודות המחצית השמאלית הן בתזוזה חיובית, אלה של המחצית הימנית בתזוזה שלילית וההפך.



איור 2: צורת המיתר באופן התנודה השישי בזמנים שונים.

אופן תנודה ה- n

התיאור המתמטי של אופן התנודה ה- n דומה לראשון. הוא מתקבל מהכפלה של התדירות הזוויתית ומספר הגל ב- n:

$$\phi_n(x,t) = A\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$
$$k_n = nk \qquad \omega_n = n\omega_0 \tag{2.11}$$

נסתכל באיור 2 המראה את אופן התנודה השישי (n=6) כפונקציה של מיקום המיתר x. זהו "תצלום" ברגע $t = 0$. ניתן לראות כי צורת המיתר בתחום $0 < x < \frac{L}{3}$ וצורתו בתחום $\frac{L}{3} < x < 2\frac{L}{3}$ וכן צורתו בתחום $2\frac{L}{3} < x < 1$ זהות הן. ניתן לומר שצורת המיתר היא שלושה גלים, כל אחד בעל <u>אורך גל</u> $\frac{L}{3}$. ובאמת, ניתן להגדיר אורך גל בסיסי של אופן התנודה הראשון:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2L \tag{2.12}$$

וכן, אורך הגל של אופן התנודה ה-n:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{nk} = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{\lambda}{n} = \frac{2L}{n} \tag{2.13}$$

אופני תנודה: פשטות התלות בזמן ובמרחב

נדגיש את אחד המאפיינים החשובים של אופני התנודה: העובדה שהתלות מרחב-זמן היא <u>מכפלה</u> של פונקציה תלויה בזמן בפונקציה תלויה במרחב. זו פשטות שאינה מצויה בכל סוגי התנודות: היא מאפיינת בעיקר גלים עומדים והיא המאפשרת פישוט בטיפול המתמטי שלהם. אנו נראה שהמצב דומה גם כאשר נדון בגלים שך מכאניקה קוונטית.

תנועות מורכבות מאבני בניין פשוטות: סופרפוזיציה

אופני התנודה הם אבני הבניין לכל סוגי התנועות במיתר שקצותיו מוחזקים. הרכבות אלה דומות להוראות הכנה של עוגה. למשל, המתכון הבא, "חבר פעם אחת אופן תנודה ראשון עם פעמיים אופן תנודה שני והחסר שליש מאופן התנודה הרביעי" נועד להכנת התזוזה המורכבת המתוארת על-ידי:

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \phi_1(x,t) + 2\phi_2(x,t) - \frac{1}{3}\phi_4(x,t)\\ &= A\left(\sin kx\cos\omega t + 2\sin 2kx\cos 2\omega t - \frac{1}{3}\sin 4kx\cos 4\omega t\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

אופן ההכנה בו מחברים או מחסירים אופני תנודה נורמאלים מכונה "סופרפוזיציה" של תנודות נורמאליות. קיים משפט מתמטי :

> "כל תנודה של מיתר המוחזק בשני קצותיו היא בעצם סופרפוזיציה של מספר כלשהו (אולי אינסופי) של אופני תנודה נורמאלים".

משפט מתמטי

אם $f(x)$ פוקציב כלשהי כאשר $0 \le x \le L$ וכן: $f(0) = f(L) = 0$ אז קיימים (אינסוף) מקדמים a_n כך ש-

$$f(x) = a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots \tag{2.15}$$

באשר $q = \frac{\pi}{L}$ וכן:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_0^L f(x) \sin mqx \, dx \tag{2.16}$$

אנו לא נוכיח את המשפט כאן. אבל נסביר את מה שעמוד מאחורי המשוואה למציאת המקדמים. ראשית נראה שהאינטגראל מהווה מעין פילטר. קיים:

$$\begin{aligned}\frac{2}{L}\int_0^L \sin m'qx \sin mqx \, dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin m'\theta \sin m\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(m'-m)\,\theta - \cos(m'+m)\theta] d\theta\end{aligned} \tag{2.17}$$

ראשית, הבה נראה מה קורה כאשר $m = m'$. במקרה זה נקבל מהאינטגרל הראשון 1 והשני: $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2m\theta \, d\theta = 0$.

מה קורה כאשר $m \ne m'$ נקבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m'-m)\,\theta - \cos(m'+m)\theta \, d\theta = \frac{\frac{1}{\pi}[\sin(m'-m)\theta]_0^\pi}{m'-m} - \frac{\frac{1}{\pi}[\sin\,(m'+m)\theta]_0^\pi}{m'+m} = 0$$

לכן נרשום בקיצור:

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin m'qx \sin mqx \, dx = \delta_{mm'} \tag{2.18}$$

כאשר $\delta_{mm'}$ זהו סימון מיוחד, הנקרא סימון קרוניקר הוא שווה 1 כאשר $m = m'$ והוא שווה 0 בכל מקרה אחר. תוצאה זו מראה שאם אכן: $f(x) = a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots$ הרי ש-

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin qx\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L (a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots)\sin qx\,dx$$
$$= a_1 \frac{2}{L}\int_0^L \sin qx \sin qx\,dx + a_2 \frac{2}{L}\int_0^L \sin 2qx \sin qx\,dx$$
$$+ a_3 \frac{2}{L}\int_0^L \sin 3qx \sin qx\,dx + \cdots = a_1 + 0 + 0 + \cdots = a_1 \qquad (2.19)$$

בדומה:

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin 2qx\,dx$$
$$= \frac{2}{L}\int_0^L (a_1 \sin qx + a_2 \sin 2qx + a_3 \sin 3qx + \cdots)\sin 2qx\,dx$$
$$= a_1 \frac{2}{L}\int_0^L \sin qx \sin 2qx\,dx + a_2 \frac{2}{L}\int_0^L \sin 2qx \sin 2qx\,dx \qquad (2.20)$$
$$+ a_3 \frac{2}{L}\int_0^L \sin 3qx \sin 2qx\,dx + \cdots = 0 + a_2 + 0 + \cdots = a_2$$

וכך מתקבלת הנוסחה לעיל.

דוגמה:

פרק את הפונקציה $f(x) = x(1-x)$ לטור סינוסים בקטע $0 \le x \le 1$.

תשובה: בברור, הפונקציה מתאפסת בקצות הקטע. במקרה שלנו $L = 1$ וכן $q = \pi$. קיים:

$$a_m = \int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x\,dx \quad m = 1,2,3,\ldots$$

הבה נבצע את האינטגרלים:

$$\int x \sin kx\,dx = -\frac{d}{dk}\int \cos kx\,dx = -\frac{d}{dk}\frac{\sin kx}{k} = \frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x\cos kx}{k} = \frac{\sin kx - kx\cos kx}{k^2}$$

בדומה:

$$\int x^2 \sin kx\,dx = -\frac{d^2}{dk^2}\int \sin kx\,dx = \frac{d^2}{dk^2}\frac{\cos kx}{k} = \frac{d}{dk}\left(-\frac{\cos kx}{k^2} - \frac{x\sin kx}{k}\right)$$
$$= 2\frac{\cos kx}{k^3} + \frac{2x\sin kx}{k^2} - \frac{x^2\cos kx}{k} = \frac{2-k^2x^2}{k^3}\cos kx + \frac{2x\sin kx}{k^2}$$

בדיקה:

$$\left(\frac{2-k^2x^2}{k^3}\cos kx+\frac{2x\sin kx}{k^2}\right)'=-\frac{2k^2x}{k^3}\cos kx-\frac{2-k^2x^2}{k^2}\sin kx+\frac{2}{k^2}\sin kx+\frac{2xk}{k^2}\cos kx$$
$$=x^2\sin kx$$

ולכן:

$$a_m=2\int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x\,dx$$
$$=2\left(\frac{\sin m\pi x-m\pi x\cos m\pi x}{(m\pi)^2}\right)_0^1-2\left(\frac{2-(m\pi)^2x^2}{(m\pi)^3}\cos m\pi x+\frac{2x\sin m\pi x}{(m\pi)^2}\right)_0^1$$
$$=2\frac{-m\pi(-1)^m}{(m\pi)^2}-2\left(\frac{2-(m\pi)^2}{(m\pi)^3}(-1)^m-\frac{2}{(m\pi)^3}\right)=\frac{4(1-(-1)^m)}{(m\pi)^3}$$

ורואים:

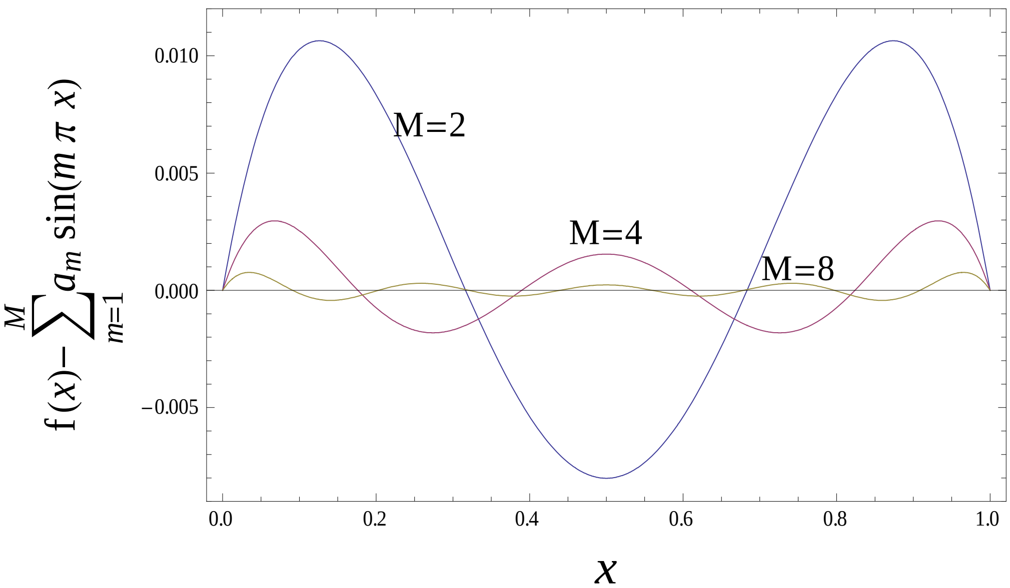
$$a_1=\frac{8}{\pi^3}$$

$$a_2=0$$

$$a_3=\frac{8}{27\pi^3}$$

...

באיור הבא אנו מציירים את טיב הקרוב של טור בן M אברים לפונקציה:



סיכום

למדנו את המושגים הבאים:

- דנו במיתר שאורכו L. תזוזות במיתר והשתנותם בזמן – הן בדרך-כלל מאד מסובכות. אבל יש אבני בניין פשוטות מהן מרכיבים את כל התזוזות – גם המסובכות.
- אבן הבניין מכונה <u>אופן תנודה נורמאלי</u>. זו תנועה "פשוטה" במיתר בה כל נקודה x מבצעת תנועה הרמונית פשוטה <u>במשרעת</u> (amplitude) התלויה במיקום.
- בכל אופן תנודה, יש לכל נקודות המיתר אותו <u>זמן מחזור</u> .
- <u>זמן המחזור</u> באופן התנודה השישי הנו קטן פי שש מזמן המחזור באופן התנודה הראשון. כלומר התנודות מהירות פי 6. ובאופן כללי, התנודות באופן התנודה ה- n-י מהירות פי n מאלה שבאופן התנודה הראשון.
- <u>אורך הגל</u> קטן ככל שמספרו הסידורי של אופן התנודה גדל.

3. גלים נעים

הקדמה

בפרק זה נדון בגלים נעים. במובן מסוים הם ההפך מהגלים העומדים בהם דנו בפרק הקודם. נקודת השקפה זו נראית הגיונית, אולם הגלים העומדים והנעים קשורים זה בזה: הגל העומד הנו סכום של שני גלים נעים, האחד נע ימינה והשני שמאלה.

נסתכל על פונקציה כלשהי, $f(\alpha)$. ראשית נשאל כיצד לתאר "הזזה של הפונקציה"? במילה הזזה אנו מתכוונים לומר שהפונקציה שומרת בדיוק על צורתה אבל היא מוזזת למקום אחר. למשל, נתבונן בפונקציה $f(\alpha) = e^{-\alpha^2}$. פונקציה זו והפונקציה המוסטת ב- 5 יחידות ימינה מצויירות בציור הבא: